tada važe tvrđenja propozicije pod a) i pod c).

U tvrđenju pod b) možemo da pretpostavimo da $\frac{\partial f}{\partial t}$ postoji za svako $t \in [a,b]$ i $x \in X$ (s.s.) kao i da umesto uslova (7.8) važi

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x),\ t \in [a,b],\ x \in X \ \ \text{(s.s.)}\ .$$

Tada tvrđenje pod b) takođe važi.

Dokaz: a) Treba dokazati da za svaki niz $(t_n)_n$ u $[a,b]$ koji konvergira ka t_0 važi $F(t_n) \to F(t_0), t_n \to t_0$. Primenom Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji na niz funkcija $f_n(x) = f(x,t_n)$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in X$, direktno sledi tvrđenje.

b) Dokaz takođe sledi na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji primenjenoj na niz funkcija $f_n(x) = \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in X$, $t_n \to t_0$, $n \to \infty$.

Koristeći teoremu srednje vrednosti

$$|\frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}| \leq |\frac{\partial}{\partial t} f(x,\xi)| \leq g(x),\ \xi \in [a,b] \text{ i skoro svako } x \in X,$$

i teoremu dominantne konvergencije, dobijamo:

$$\frac{d}{dt}F(t_0) = \lim_{t_n \to t_0} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{t_n \to t_0} \int_X \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\, d\mu$$
$$= \int_X \lim_{t_n \to t_0} \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\, d\mu = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0) d\mu.$$

c) Posmatrajmo preslikvanje $h : X \times [a,b] \to \mathbf{C}$ dato sa

$$h(x,t) = \int_a^t f(x,s)ds.$$

Kako je f neprekidna na $[a,b]$ za svako $x \in X$, sledi da je $\frac{\partial}{\partial t} h(x,t) = f(x,t)$. Kako ovaj Rimanov integral postoji, on je granična vrednost Rimanovih suma, pa je preslikavanje $x \mapsto h(x,t)$ merljivo za svako $t \in [a,b]$. Iz (7.7) sledi da je $|h(x,t)| \leq g(x)(b-a)$, pa je funkcija $x \mapsto h(x,t)$ integrabilna za svako $t \in [a,b]$. Definišimo:

$$H(t) = \int_X h(x,t) d\mu.$$

Prema tvrđenju propozicije pod (b) dobijamo:

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} h(x,t) d\mu = \int_X f(x,t) d\mu = F(t).$$